المحاضرة الخامسة

العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

العزوم
الدالة المتجددة للعزوم

١ العزوم Les moments

كما التباين يعتبر العزم من تطبيقات توقع دالة. نميز بين نوعين من العزوم: العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل. تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل α3 (coefficient d'asymétrie) ومعامل التفلطح α4 (Kurtosis ou coefficient d'aplatissement).

(أ) العزم المركزي Le moment central μ_r.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي:

$$\mu_r = E\left(\left(X-\mu\right)^r\right), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_0 = E\left[\left(X-\mu\right)^0\right] = E(1) = 1 \qquad \mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = E\left[\left(X-\mu\right)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = V(X) \qquad \mu_2 = \sigma^2$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغيرة متقطعة أو مستمرة كما يلي:

$$\mu_r = \sum_i \left(x_i - \mu\right)^r f(x) \qquad \mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^r f(x)dx$$

مثال . أحسب العزوم المركزية من الدرجة ٠، ١، ٢ و٣ للمتغيرة ع ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)dx = 1$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mu - \mu(1) = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^2 f(x)dx = \sigma^2 = \frac{4}{9}$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx + \int_{0}^{2} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx = \frac{16(67)}{27(5)}$$

مثال: أحسب العزوم المركزية من الدرجة ٠، ١، ٢ و٣ للمتغيرة ع المتقطعة التي تمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

ب) العزم المرتبط بالأصل Moment autour de la moyenne μ'_r

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي: $\boxed{\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,1,2,...}$

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1 \qquad\qquad \mu'_0 = 1$$
$$\mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu \qquad\qquad \mu'_1 = \mu$$
$$\mu'_2 = \mu^2 - \sigma^2 = \mu^2 - \mu_2 \qquad\qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2$$

مثال: أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة ٠، ١، ٢، ٣ و٤ للمتغيرة ع المتصلة ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\qquad \mu'_1 = \mu = 4/3, \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$

$$\int_0^2 x^3(\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5}, \qquad \mu'_4 = \int_0^2 x^4(\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

مثال٢. أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة ٠، ١، ٢، ٣ و٤ للمتغيرة ع المتقطعة التي تمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

ج) العلاقة بين العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل

$$\mu_r = \mu'_r - C_r^1 \cdot \mu'_{r-1} \cdot \mu^1 + ... + (-1)^i C_r^i \cdot \mu'_{r-i} \cdot \mu^i + ... + (-1)^r \cdot \mu'_0 \cdot \mu^r$$

يمكن أيضا الحصول على العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم r مرة.

٢ الدالة المتجددة للعزوم La fonction génératrice des moments $M_x(t)$

الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بمتغيرة (معلمة) t بالإضافة إلى ارتباطها ب X، ود م ع كما يلي:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

في حالة م ع متقطعة: $M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$ و في حالة م ع مستمرة:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

مثال: أكتب الدالة المتجددة للعزرم من أجل $t \neq 0$ للم ع المعرفة في كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_0^2 e^{tx} f(x)dx + \int_2^{+\infty} e^{tx}(0)dx = 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx + 0$$

$$M_x(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 UdV = \frac{1}{2}\left[[UV]_0^2 - \int_0^2 VdU\right]. \qquad U = x \Rightarrow dU = dx,\ dV = e^{tx}dx \Rightarrow V = \frac{e^{tx}}{t}$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2-\int_0^2\frac{e^{tx}}{t}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\left[2\frac{e^{2t}}{t}\right]-\frac{1}{t}\left[\frac{e^{2t}}{t}\right]\right)=\frac{e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{2t^2}$$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من درجة r:

$$\boxed{\mu'_r=\frac{d^rM_x(t)}{dt^r}\ \ avec\ t=0}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات تساوي توزيعين احتماليين، مثلا عند تحقق شروط معينة، ونحتاج ذلك خاصة عند دراسة التقارب بين التوزيعات الاحتمالية. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

لتكن م ع X وY لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ نقول أن م ع X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا:

$$\mathbf{M_x(t) = M_y(t)}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات إستقلال توزيعين احتماليين. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

إذا X وY م ع مستقلتان، لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ فإن: $\mathbf{M_{x+y}(t) = M_x(t)\,.\,M_y(t)}$

٣ خلاصة

العزم و الدالة المتجدد للعزوم هي عبارة عن توقعات دوال (أنظر المبحث السابق). يدخل العزم في حساب بعض المؤشرات مثل التباين و التوقع الرياضي، معامل التفلطح و معامل التماثل.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي: $\mu_r=E\left((X-\mu)^r\right),\quad r=0,\,1,\,2,\,...$

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي: $\mu'_r=E(X^r),\ \ r=0,\,1,\,2,\,...$

تعرف الدالة المتجددة للعزوم كما يلي: $M_x(t)=E(e^{tx})$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية و ذلك من خلال نظريتين أساسيتين.

- نقول أن م ع X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا: $M_x(t) = M_y(t)$
- إذا X وY م ع مستقلتان فإن: $M_{x+y}(t) = M_x(t)\,.\,M_y(t)$